Respuestas Segundo Parcial MA-1111 (B).

1. (3 ptos. c/u)

(a) $$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2+x-1}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2(x+1)(x-\frac{1}{2})}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1^-} \frac{2(x-\frac{1}{2})}{(x+1)} = +\infty$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3+x}-\frac{1}{3}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3-(3+x)}{3(3+x)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{3x(3+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{3(3+x)} = -\frac{1}{9}$$

(c) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\mathrm{sen}(\pi x)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{\mathrm{sen}(\pi x)} = \lim_{y\to 0} \frac{(y)(y+2)}{\mathrm{sen}(\pi(y+1))} = \lim_{y\to 0} \frac{(y)(y+2)}{\mathrm{sen}(\pi y+\pi))} =$$
$$\lim_{y\to 0} \frac{(y)(y+2)}{\mathrm{sen}(\pi y)\cos(\pi)+\mathrm{sen}(\pi)\cos(\pi y)} = \lim_{y\to 0} \frac{(y)(y+2)}{-\mathrm{sen}(\pi y)} = \lim_{y\to 0} -\Big(\frac{\pi y}{\mathrm{sen}(\pi y)}\Big)\Big(\frac{y+2}{\pi}\Big) = -\frac{2}{\pi}$$

2. (5 puntos)

$f(x)$ es continua en el intervalo $(-\infty,-2)$ pues en ese intervalo $f(x)$ es constante.

$f(x)$ es continua en el intervalo $(-2,2)$ pues en ese intervalo $f(x)=x^3$, una función polinómica de grado 3.

$f(x)$ es continua en el intervalo $(2,3)$ pues en ese intervalo $f(x)=x-2$, una función polinómica de grado 1.

Falta estudiar la continuidad en los puntos $x=-2$ y $x=2$.

$$f(-2) = -8 = \lim_{x\to -2^-} -8 = \lim_{x\to -2^+} x^3 = -8$$

$$f(2) = 8 = \lim_{x\to 2^-} x^3 \neq \lim_{x\to 2^+} x-2 = 0$$

Es decir, es continua en -2 y discontinua en 2.

En resumen, $f(x)$ es continua en $(-\infty,2)\cup(2,3)$

3. (4 puntos)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{3(x+h)-2} - \sqrt{3x-2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{3(x+h)-2} - \sqrt{3x-2})}{h}\frac{(\sqrt{3(x+h)-2} + \sqrt{3x-2})}{(\sqrt{3(x+h)-2} + \sqrt{3x-2})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)-2 - 3x+2}{h(\sqrt{3(x+h)-2} + \sqrt{3x-2})} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h(\sqrt{3(x+h)-2} + \sqrt{3x-2})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3}{(\sqrt{3(x+h)-2} + \sqrt{3x-2})} = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}
\end{aligned}$$

4. (4 puntos)

En un intervalo "pequeño" alrededor de $x = 0$, se tiene que $|1-x| = 1-x$ y, por lo tanto,

$$f(x) = \frac{|1-x|\cos(x)}{1+\mathrm{sen}(x)} + 2 = \frac{(1-x)\cos(x)}{1+\mathrm{sen}(x)} + 2$$

Entonces

$$f'(x) = \frac{[-\cos(x) - (1-x)\mathrm{sen}(x)][1+\mathrm{sen}(x)] - \cos(x)(1-x)\cos(x)}{(1+\mathrm{sen}(x))^2}$$

Por lo tanto:

$$f'(0) = \frac{[-\cos(0) - \mathrm{sen}(0)][1+\mathrm{sen}(0)] - \cos^2(0)}{(1+\mathrm{sen}(0))^2} = \frac{-2}{1} = -2$$

El punto de tangencia es $(0,3)$ y la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 3 = -2\,x$$

5. (4 puntos)

Considero la función $f(x) = x^2 - 3$ en el intervalo $[0,2]$.

(a) $f(x)$ es continua en $[0,2]$

(b) $f(0) = -3$ y $f(2) = 1$

Por el Teorema del Valor Intermedio existe un $c \in (0,2)$ tal que:

$$f(c) = 0$$

Como $f(c) = c^2 - 3$, se tiene que $c^2 - 3 = 0$ y por lo tanto $c^2 = 3$.

6. (4 puntos)

Dado $\epsilon > 0$ debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-2| < \delta$ entonces $|(x^2+2x+3)-11| < \epsilon$

Veamos:

$$|(x^2+2x+3) - 11| = |x^2+2x-8| = |(x+4)(x-2)| = |x+4|\,|x-2|$$

Si $|x-2| < 1$ entonces $|x+4| < 7$. Por lo tanto, si $\delta \leq \min\{1, \frac{\epsilon}{7}\}$ y $0 < |x-2| < \delta$, se tiene que:

$$|(x^2+2x+3) - 11| = |x+4|\,|x-2| < 7\delta \leq 7\frac{\epsilon}{7} = \epsilon$$